

## **DESCRIZIONE DEL METODO**

Il metodo utilizzato permette di descrivere il flusso potenziale incomprimibile su un corpo tridimensionale non portante di forma arbitraria.

La superficie in analisi viene suddivisa in elementi quadrilateri opportunamente resi piani sui quali viene posta una sorgente distribuita di potenziale. Le condizioni al contorno permettono di determinare le intensità delle sorgenti imponendo l'annullamento della componente normale della velocità sulla superficie.

NOTA : i dati e le conclusioni di questo capitolo si riferiscono allo studio di J.L.Hess e A.M.O. Smith riportato al primo punto della bibliografia.

### **Definizione matematica del problema**

Consideriamo un flusso stazionario su un corpo tridimensionale. La superficie del corpo S sia descritta da un'equazione del tipo :

$$F(x, y, z) = 0$$

dove x, y e z sono le coordinate di un riferimento cartesiano. Il flusso esterno indisturbato  $V_\infty$  è posto ad intensità unitaria :

$$V_\infty = (V_{\infty x}^2 + V_{\infty y}^2 + V_{\infty z}^2)^{1/2} = 1$$

La velocità del flusso può essere descritta dal gradiente di una funzione potenziale  $\Phi$  tale che :

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{in } R' \quad (\text{equazione di Laplace nella regione esterna al corpo})$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = n \cdot \text{grad } \Phi = 0 \quad \text{su } S \quad (\text{condizione al contorno})$$

$$\Phi \rightarrow (x V_{\infty x} + y V_{\infty y} + z V_{\infty z}) \quad \text{per } (x^2 + y^2 + z^2) \rightarrow \infty$$

dove  $\Delta$  denota il Laplaciano e n il versore normale alla superficie S.

Esprimendo  $\Phi$  come somma del flusso indisturbato più la

componente di variazione locale dovuta al corpo :

$$\Phi = \varphi_{\infty} + \varphi$$

$$( \text{dove } \varphi_{\infty} = - ( x V_{\infty x} + y V_{\infty y} + z V_{\infty z} ) )$$

la terza condizione si modifica semplicemente in :

$$\varphi \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad ( x^2 + y^2 + z^2 ) \rightarrow \infty$$

$\varphi$  rappresenta appunto il potenziale incognito dovuto alla presenza del corpo e qui analizzato come distribuzione di sorgenti sulla superficie di questo .

Il potenziale in un punto P dovuto ad una sorgente unitaria q è :

$$1 / r ( P , q )$$

dove  $r ( S , q )$  è la distanza tra il punto q e la superficie S .

Mentre il potenziale in un punto P qualsiasi dovuto ad una distribuzione di sorgente  $\sigma(q)$  sulla superficie s è :

$$\varphi ( x , y , z ) = \iint ( \sigma(q) / r ( P , q ) ) dS$$

Il potenziale così espresso soddisfa già la prima e la terza delle condizioni poste ( cioè tende a 0 ad  $\infty$  e soddisfa l'equazione di Laplace ).

Per far sì che soddisfi anche la condizione al contorno occorre derivare la funzione ottenendo :

$$\partial\varphi/\partial n | _S = -2\pi\sigma(p) + \iint \partial (1/r(p,q)) / \partial n \sigma(q) dS$$

cioè la condizione al contorno diventa

$$2\pi\sigma(p) + \iint \partial (1/r(p,q)) / \partial n \sigma(q) dS = - n (p) V_{\infty}$$

dove  $n(p)$  è il versore normale alla superficie del corpo funzione del punto.

Risolvendo questa equazione ( di Fredholm ) si ottiene il potenziale

dovuto alla presenza di corpo che , sommato alla componente ad infinito , permette di determinare la velocità del flusso in qualsiasi punto dello spazio.

Tale soluzione è valida per corpi comunque conformati , non si richiede cioè che il corpo in esame sia sottile o analiticamente definito o semplicemente connesso. L'unica condizione da soddisfare è la continuità della superficie, cioè non sono garantiti risultati esatti in caso di presenza di spigoli . Tale limitazione appare però di modesta entità in quanto gli spigoli possono essere proficuamente sostituiti con regioni di grande , ma finita, curvatura. L'esperienza dimostra che il metodo da comunque risultati affidabili in caso di spigoli convessi .

### **Descrizione del metodo di soluzione dell'equazione di Fredholm**

Il problema principale nel metodo matematico posto sta nella soluzione dell'equazione di Fredholm .

Una delle soluzioni possibili ( quella qui applicata ) consiste nell'approssimare la superficie del corpo tramite un grande numero di elementi quadrilateri piani su ognuno dei quali si assume distribuita una densità di sorgente costante .In questo modo si sostituisce all'equazione integrale un sistema di equazioni lineari.

Partendo da un certo numero di punti distribuiti sulla superficie e associandoli in gruppi di quattro si ottiene la definizione iniziale dei quadrilateri ( il codice sviluppato richiede come dato iniziale i punti del corpo già associati in elementi quadrilateri ).

Tali quadrilateri , per come sono stati definiti , non saranno necessariamente piani. Per ovviare a ciò il metodo prevede di proiettare i vertici di ogni quadrilatero sul piano passante per il punto medio degli stessi utilizzando come normale il versore ottenuto dal prodotto delle due 'diagonali'.

Si rende a questo punto necessaria la scelta di un punto rappresentativo della superficie rispetto al quale applicare la condizione al contorno ed eventualmente , in un secondo tempo , valutare velocità e pressioni ottenute.

Il punto scelto è quello rispetto al quale si annulla la componente tangenziale della velocità data dall'elemento su sé stesso. Tale punto prende il nome di null point dell'elemento.

Valutando la velocità indotta in ogni null point da una distribuzione unitaria di sorgente su ognuno degli altri elementi si ottiene la matrice dei coefficienti di un sistema lineare avente come incognite le intensità delle sorgenti e come termini noti le componenti normali delle velocità nei null point.

$$[ \text{matrice di influenza} ] [ \text{vettore intensità} ] = - [ \text{vettore } V_n ]$$

matrice di influenza: matrice dei termini noti , l'elemento  $n,k$  rappresenta la velocità indotta nel null point  $n$ -esimo da una distribuzione di densità di sorgente uniforme sul quadrilatero  $k$ -esimo.

vettore intensità : ogni elemento rappresenta l'intensità , incognita , distribuita sul quadrilatero corrispondente .

vettore  $V_n$  : ogni elemento rappresenta la componente normale della velocità esterna valutata nel corrispondente null point.

Tale sistema rappresenta la condizione al contorno , impone cioè l'annullarsi della velocità normale alla superficie in ogni null point. Una volta risolto , note quindi le intensità delle sorgenti , è possibile calcolare in ogni punto dello spazio non appartenente alla superficie del corpo la velocità del flusso esterno.

La velocità sulla superficie del corpo si otterrà dall'interpolazione dei dati ottenuti nella valutazione delle velocità nei null point. Tale limite è congenito nel tipo di approssimazione utilizzata per rappresentare il corpo ( si veda il grafico delle velocità sull'elemento a pag. ). L'andamento della velocità sulla superficie del corpo ( ad esclusione dei null point ) è infatti fortemente influenzato dalla distribuzione di sorgenti e non rappresenta quindi correttamente la realtà fisica del problema.

Va notato come la matrice dei coefficienti sia indipendente dal flusso esterno. E' quindi possibile calcolare qualsiasi flusso come combinazione lineare dei risultati dati dai flussi unitari in direzione degli assi di riferimento calcolando una volta per tutte la matrice di influenza.

## Velocità indotta da un quadrilatero sorgente piano

Le formule basilari del metodo sono quelle che danno le componenti della velocità indotta in un punto dello spazio da un quadrilatero piano con densità di sorgente unitaria.

Nel ricavare dette formule è conveniente riferirsi ad un sistema di riferimento tale che il quadrilatero in questione giaccia nel piano  $xy$ . Con tale riferimento il potenziale in un punto  $P(x, y, z)$  risulta

$$\varphi = \iint_A \frac{dA}{r}$$

dove  $r$  : distanza tra  $P$  ed i punti del quadrilatero

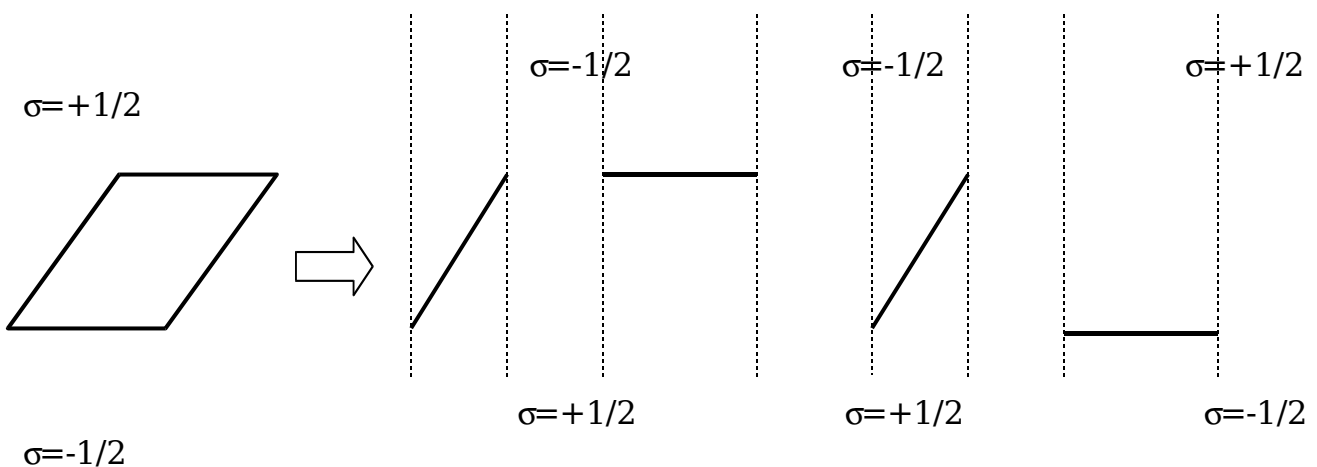
$A$  : area del quadrilatero

$\xi_k, \eta_k$  ( $k=0,1,2,3$ ) : coordinate dei vertici del quadrilatero

Le componenti della velocità indotta risultano quindi :

$$V_x = -\partial\varphi/\partial x \quad , \quad V_y = -\partial\varphi/\partial y \quad , \quad V_z = -\partial\varphi/\partial z$$

La valutazione dei cui integrali risulta semplificata assumendo il loro valore come somma di quattro termini ognuno dei quali dipendente solo da un lato del quadrilatero. E' infatti possibile definire il contributo di ogni lato come somma di due strisce sorgenti seminfinite separate dal lato in questione l'una avente densità di sorgente  $1/2$  e l'altra  $-1/2$ .



Come è evidente dalla figura la sovrapposizione dei potenziali delle tre strisce si elide all'esterno del quadrilatero e si somma all'interno

dando luogo appunto al potenziale del quadrilatero sorgente unitario. Operando in questo modo è quindi possibile scrivere l'equazione della velocità indotta come somma di quattro termini analoghi al seguente ( valido per la componente y del lato 12 ) :

$$V_{y12} = 1/2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta \, d\xi \, d\eta$$

dalla cui integrazione si ottiene:

$$V_{y12} = (\xi_1 - \xi_2)/d_{12} * \log ( (r_1+r_2-d_{12})/(r_1+r_2+d_{12}) )$$

Dove :  $r_1$  = distanza P - vertice1

$r_2$  = distanza P - vertice2

$d_{12}$  = distanza vertice1 - vertice2

Analoga forma assume la componente x mentre per la componente z risulta :

$$V_{z12} = \tan^{-1} ( (m_{12}e_1 - h_1) / (z r_1) ) - \tan^{-1} ( (m_{12}e_2 - h_2) / (z r_2) )$$

Riassumendo le formule per il calcolo della velocità in un punto P ( x,y,z ) indotta da un quadrilatero di vertici  $\xi_k, \eta_k$  ( k=0,1,2,3 ) risultano :

$$V_x = \sum_{a=1,2,3,4; b=2,3,4,1} (\eta_b - \eta_a)/d_{ab} * \log ( (r_a+r_b-d_{ab})/(r_a+r_b+d_{ab}) )$$

$$V_y = \sum_{a=1,2,3,4; b=2,3,4,1} (\xi_a - \xi_b)/d_{ab} * \log ( (r_a+r_b-d_{ab})/(r_a+r_b+d_{ab}) )$$

$$V_z = \sum_{a=1,2,3,4; b=2,3,4,1} \tan^{-1} ( (m_{ab}e_a - h_a) / (z r_a) ) - \tan^{-1} ( (m_{ab}e_b - h_b) / (z r_b) )$$

dove :  $d_{ab}$  = lunghezza lato ab

$m_{ab}$  = coeff. angolare lato ab

$r_k$  = distanza punto P - vertice k

$e_k = z^2 + (x - \xi_k)^2$

$h_k = (y - \eta_k)^2 + (x - \xi_k)^2$

## **Sulla scelta dei quadrilateri**

A causa della necessaria proiezione in piano degli elementi iniziali (i cui punti giacciono effettivamente sulla superficie fisica del corpo) risulta evidente che i lati di quadrilateri adiacenti non saranno, in generale, coincidenti. Il corpo in forma approssimata non sarà quindi un vero e proprio poliedro ma presenterà delle piccole aperture. Tali aperture però introducono un errore di entità trascurabile rispetto all'approssimazione principale del metodo (cioè quella di rappresentare la superficie tramite elementi piani). Va tenuto presente che la rappresentazione in forma di poliedro del corpo non ha un diretto significato fisico ma è una approssimazione della distribuzione di sorgenti. Cioè il flusso ottenuto non è il flusso che si avrebbe su un analogo corpo a superficie poliedrica. Se anche gli spigoli degli elementi coincidessero la velocità normale sarebbe nulla solo in un punto di ogni elemento e sarebbe comunque infinita in corrispondenza degli spigoli.

Ciò che è importante è che l'ampiezza delle aperture, misurabile come distanza tra i punti sulla superficie e quelli proiettati, sia piccola rispetto alla dimensione dell'elemento. Questa verifica è anche una prova della buona scelta dei punti iniziali.

L'utilizzo di elementi di forma triangolare infine, pur eliminando l'effetto delle aperture, introduce una fonte di incertezza nella scelta del punto di valutazione delle velocità. Tale problema vanifica il, relativo, beneficio dell'eliminazione delle aperture.

Oltre a ciò si deve considerare che, normalmente, la rappresentazione iniziale del corpo è data tramite un reticolo di punti ottenuto per sezioni ad ascisse successive (profili NACA e simili). Partendo da tali dati è immediata una scomposizione in quadrilateri mentre lo è molto meno in triangoli.

## **Sul calcolo dei Null Point**

Il metodo impone la scelta, su ogni elemento, di un punto nel quale imporre la condizione al contorno. Pur essendo evidente che per un elemento rettangolare il punto deve essere il centro, la scelta non è così ovvia per un quadrilatero di forma qualsiasi.

Tre punti sono stati presi in considerazione: il baricentro dell'area del quadrilatero, il punto medio dei quattro vertici e il null point (punto rispetto al quale l'elemento non ha effetto, rispetto alla velocità tangenziale, su sé stesso). La scelta è caduta su

quest'ultimo essendo quello che appare avere un maggior significato fisico agli effetti del problema.

L'uso dei null point minimizza infatti l'effetto dell'approssimazione essendo questi gli unici punti rispetto ai quali l'elemento ( inteso come rappresentazione approssimata di una porzione di superficie ) non risente , almeno a livello locale , della schematizzazione adottata.

Per un quadrilatero giacente nel piano xy le coordinate del null point si determinano imponendo

$$V_x ( x,y ) = 0$$

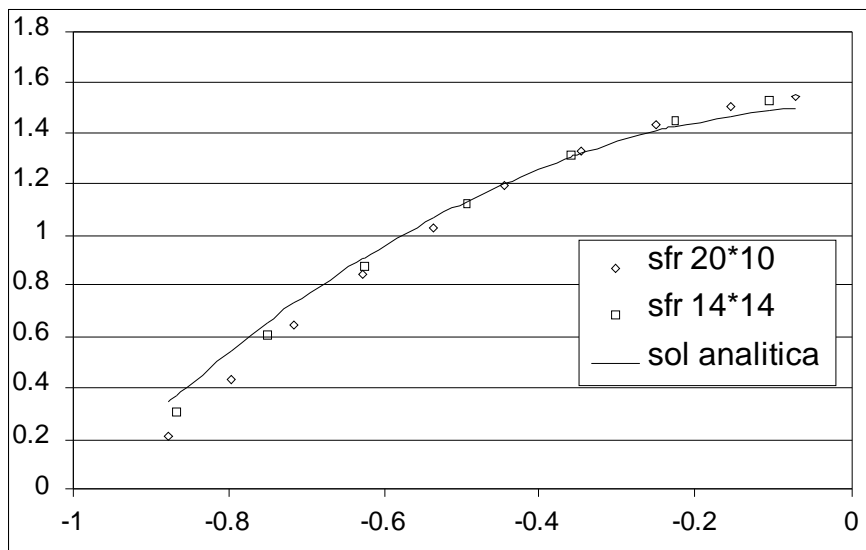
$$V_y ( x,y ) = 0$$

### **Sul numero e la disposizione degli elementi**

L'accuratezza del calcolo dipenderà non solo dal numero di elementi (approssimativamente uguale a quello dei punti di partenza ) ma anche dalla loro distribuzione . E' intuitivo che si otterranno migliori risultati concentrando un maggior numero di elementi nelle regioni a maggior curvatura o comunque dove è possibile prevedere un maggior gradiente del potenziale. Esistono comunque altri fattori che influenzano la accuratezza del calcolo : è ad esempio richiesta una maggior accuratezza per i flussi interni che per quelli esterni . Vista comunque la capacità di calcolo dei moderni computer (un pentiumII impiega circa un minuto per risolvere un sistema di 1000 equazioni !) il numero dei punti sarà funzione prevalente del metodo di definizione del corpo in analisi , per il quale raramente sarà disponibile una definizione analitica e quindi la possibilità di scegliere a piacere la collocazione degli elementi .

Riporto un esempio significativo dei risultati ottenibili con una corretta distribuzione degli elementi :





Le due serie di dati si riferiscono alla velocità ( adimensionale ) calcolata su due sfere divise in ugual numero di elementi ( 210 ) ma con criteri diversi ( 20 meridiani per una e 14 per l'altra ).

E' evidente come una divisione in elementi di forma il più possibile regolare porti a dei risultati più vicini alla soluzione analitica nonostante un numero di rilevazioni inferiore.

## **CONCLUSIONI**

Il metodo si è rivelato , nelle prove svolte , sufficientemente affidabile per un utilizzo come ausilio alla fase di progetto preliminare.

Le limitazioni rivelate sono essenzialmente connaturate all'ambito di validità delle ipotesi di flusso potenziale. All'interno dello stesso ambito , e a seguito di una attenta disposizione degli elementi , la precisione di calcolo risulta sufficiente, pur non evidenziando strettamente delle caratteristiche di metodo numerico esatto ( cfr. ).

La limitazione principale risiede nella scarsa interattività del codice fin qui sviluppato. Sarebbe quindi auspicabile nel futuro un'integrazione all'interno di un più completo pacchetto che ne permetta l'utilizzo in modo più agile , automatizzando le fasi di inserimento dati e di rappresentazione dei risultati. La possibilità di salvare praticamente tutte le grandezze calcolate ( variabili globali ) è stata introdotta proprio pensando ad un sviluppo di questo tipo.

## **BIBLIOGRAFIA**

- John L. Hess e A. M. O. Smith , " Calculation of nonlifting potential flow about arbitrary three dimensional bodies" articolo in "Journal of ship research" volume 8 numero 2 , The society of naval architects and marine engeneers , New York 1964
- J. L. Hess , " Numerical solution of inviscid subsonic flow " , von Karman Institute for Fluid Dinamics , Belgio 1971
- Bruno Finzi , " Lezioni di Aerodinamica " , Libreria Editrice Politecnica Tamburini , Milano 1960
- Peter A. Darnell Philip E. Margolis , " C Manuale di Programmazione " , McGraw-Hill , Milano 1997
- Herbert Schildt , " La Guida Completa C " , McGraw-Hill , Milano 1998
- E. Marchionna U. Gasapina , "Appunti ed esercizio di geometria" , Masson , Milano 1989
- U. Gasapina , "Algebra delle matrici" , Masson , Milano 1989